CHAPITRE IV : NOYAUX CAPACITAIRES

Au premier paragraphe, on étudie, sous le nom de noyaux capacitaires, les applications de $\phi(E)$ dans $\phi(F)$ ayant les propriétés fondamentales des projections, et on montre que ces applications sont des calibres. Le troisième paragraphe est consacré à une extension de ces notions. Au second, on établit des propriétés remarquables reliant les schémas de Souslin et les noyaux capacitaires. Enfin, on donne dans le quatrième des compléments dans le cas abstrait.

1.- NOYAUX CAPACITAIRES

1 DÉFINITION.- *Un* noyau capacitaire de E dans F *est une application* U *de* $\phi(E)$ *dans* $\phi(F)$ *satisfaisant les conditions suivantes*

a) *si* $f \leq g$, *alors* $Uf \leq Ug$

b) *si* (f_n) *est une suite croissante*, *on a* $U(\sup f_n) = \sup Uf_n$

c) *si* (g_n) *est une suite décroissante de fonctions s.c.s.*, *on a*

$$U(\inf g_n) = \inf Ug_n$$

d) *si* g *est s.c.s.*, *la fonction* Ug *est analytique*.

Si, *de plus*, Ug *est s.c.s. quand g est s.c.s.*, *nous dirons que* U *est un noyau* régulier.

REMARQUES.- 1) Si D est un espace localement compact à base dénombrable, on suppose de plus dans c) et d) que les fonctions s.c.s. sont à support compact. On peut alors prolonger U au compactifié $E = D \cup \{\infty\}$ en posant $Uf = +\infty$ si $f(\infty) \neq 0$.

2) si le noyau U n'est défini que sur les parties de E, on peut le prolonger aux fonctions en posant, si $U1_{\emptyset} = 0$ et $U1_E$ est finie, $Uf = \int U1_{\{f>t\}}\, dt = \int U1_{\{f\geq t\}}\, dt$ et, si $U1_E$ n'est pas finie, en combinant ce procédé avec un "Arc tg" .

On peut encore formuler la définition d'un noyau capacitaire de la manière suivante

2 DÉFINITION.- <u>Un noyau capacitaire de</u> E <u>dans</u> F <u>est une application</u> U <u>de</u> $\phi(E)$ <u>dans</u> $\phi(F)$ <u>satisfaisant les conditions suivantes</u>

a) <u>pour tout</u> $y\in F$, <u>la fonction</u> $f \to U(y,f)$ <u>est une capacité sur</u> E (<u>où</u> $U(y,f)$ <u>désigne la valeur de la fonction</u> Uf <u>au point</u> y)

b) <u>pour toute fonction s.c.s.</u> g <u>sur</u> E, <u>la fonction</u> $y \to U(y,g)$ <u>est analytique sur</u> F. <u>Si, de plus</u>, <u>cette fonction est s.c.s.</u>, <u>le noyau est dit régulier</u>.

Nous omettrons désormais l'adjectif "capacitaire" lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

3 EXEMPLES.- 1) Une capacité est un noyau régulier à valeurs dans les fonctions constantes

2) Soit h une fonction monotone croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$: l'application qui à $f\in\phi(E)$ associe $h\circ f\in\phi(E)$ est un noyau régulier

3) Une projection est un noyau régulier

4) Plus généralement, soit α une application continue de E dans F. L'application "image directe" $A \to \alpha(A)$ est un noyau régulier (que l'on peut prolonger aux fonctions par le procédé indiqué ci-dessus : si α est une projection, on retrouve notre définition de la projection d'une fonction). Et l'application "image réciproque"

$A \to \alpha^{-1}(A)$ est également un noyau régulier. Si l'application α est seulement borélienne, on obtient encore des noyaux, non réguliers.

5) Soient $E\times F$ un produit, et G une partie compacte de $E\times F$. L'application qui à une partie A de E associe la projection de $G \cap (A\times F)$ sur F est un noyau régulier (que nous avons déjà vu au n.20-5) du chapitre II)

6) Soient π_1 et π_2 les projections de $E\times E$ sur E. Les applications suivantes sont des noyaux réguliers de $E\times E$ dans E :

i) $f \to \sup(\pi_1 f, \pi_2 f)$ ii) $f \to \inf(\pi_1 f, \pi_2 f)$ iii) $f \to \pi_1 f + \pi_2 f$

iv) $f \to \pi_1 f . \pi_2 f$ (si f est un produit tensoriel $(f_1 \times f_2)$, on retrouve, "à peu près", le sup, l'inf, la somme et le produit de f_1 et f_2). Enfin, l'application $f \to (\pi_1 f \times \pi_2 f)$ est un noyau de $E\times E$ dans $E\times E$.

7) Soit U un noyau (positif) au sens de la théorie de la mesure, i.e. une application de $\phi(E)$ dans $\phi(F)$ telle que

i) pour tout $y \in F$, l'application $f \to U(y,f)$ est l'intégrale supérieure associée à une mesure sur E

ii) pour toute fonction borélienne f sur E, la fonction $y \to U(y,f)$ est borélienne sur F

Alors U est un noyau capacitaire, régulier s'il est fellerien (i.e. si Uf est une fonction continue lorsque f est continue).

8) Soit E un ensemble convexe compact dans un espace vectoriel localement convexe et métrisable. Une fonction f sur E est dite <u>concave</u> si, pour tout $x \in E$ et toute mesure λ sur E de barycentre x, on a $\int f\, d\lambda \leq f(x)$. On peut montrer que l'application qui à une fonction f sur E associe la plus petite fonction concave Uf qui la majore, est un noyau régulier (cet exemple, emprunté à MOKOBODZKI [ ], est relié au théorème de représentation intégrale de Choquet).

4 THÉORÈME.- Tout noyau capacitaire est un calibre.

DÉMONSTRATION.- Soit U un noyau de E dans F : nous supposerons U défini seulement sur les parties de E, puisque nous nous sommes limités à ce cas pour les calibres, mais ce n'est pas une restriction sérieuse. Le noyau U vérifie la condition a) du n.7 du chapitre III; il vérifie aussi b) d'après le théorème de Choquet. Vérifions enfin c). Désignons par d une distance sur $\underline{\underline{K}}(E)$ compatible avec sa topologie, et par (L_n) une suite de compacts de E telle que les L_n^c forment une base d'ouverts de E stable pour (Uf) : tout compact de E est la limite (au sens ensembliste et au sens de la topologie de $\underline{\underline{K}}(E)$) d'une sous-suite décroissante de (L_n). Posons alors, pour tout entier m, tout $y \in F$ et tout $K \in \underline{\underline{K}}(E)$, $U_m(y,K) = \sup U(y,L_n)$, L_n inclus dans la boule de centre K et de rayon 1/m de $\underline{\underline{K}}(E)$. Pour m fixé, l'application $(y,K) \rightarrow U_m(y,K)$ est analytique : en effet, pour tout $t \geq 0$, on a

$$U_m(y,K) > t \iff \exists n \quad d(L_n,K) < 1/m \quad \text{et} \quad U(y,L_n) > t$$

et donc $\{(y,K) : U_m(y,K) > t\}$ est $[P(\underline{\underline{G}} \cap \underline{\underline{A}})]_\sigma = \underline{\underline{A}}$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $U(y,K) = \lim_{m \to \infty} U_m(y,K)$ pour tout $y \in F$ et tout $K \in \underline{\underline{K}}(E)$. Et cela résulte aisément de la continuite à droite de la fonction $K \rightarrow U(y,K)$, pour y fixé, et du fait que tout $K \in \underline{\underline{K}}(E)$ est la limite d'une sous-suite décroissante de (L_n).

Etant donné le théorème 9 du chapitre III, on a alors

5 COROLLAIRE.- Soit U un noyau capacitaire de E dans F. Si f est analytique sur E, alors Uf est analytique sur F.

Nous verrons une autre démonstration de ce résultat au paragraphe suivant.

Nous avons défini les noyaux sur les fonctions (et non seulement sur les ensembles, comme pour les calibres), pour avoir la possibilité de composer des noyaux. Le théorème suivant est trivial; il est néanmoins important

6 THÉORÈME.- Soient U un noyau capacitaire régulier de E dans F et V un noyau capacitaire de F dans G. L'application composée $V \circ U$ est alors un noyau capacitaire de E dans G, régulier si V l'est.

REMARQUE.- Si le noyau V est tel que $V(\inf f_n) = \inf V(f_n)$ pour toute suite décroissante de fonctions analytiques bornées (ce qui est le cas, par exemple, si V est un noyau au sens de la théorie de la mesure), alors $V \circ U$ est encore un noyau même si U n'est pas régulier, du moment que $U1_E$ est bornée.

7 COROLLAIRE.- Soit U un noyau capacitaire de E dans F. Si f est universellement capacitable sur E, alors Uf est universellement mesurable sur F, et universellement capacitable si U est régulier.

DÉMONSTRATION.- Quitte à remplacer U par $(\mathrm{Arc\,tg}) \circ U$, on peut supposer $U1_E$ bornée. Alors, si λ est une mesure sur F (resp une capacité, si U est régulier), $\lambda \circ U$ est une capacité sur E. On a donc $\lambda[Uf] = \sup \lambda[Ug]$, g s.c.s., $g \leq f$. Mais Ug est analytique pour g s.c.s., et donc universellement mesurable (resp universellement capacitable), et donc $\lambda[Uf] = \sup \lambda(h)$, h s.c.s., $h \leq Uf$. Il est alors clair que Uf est λ-mesurable (resp λ-capacitable).

REMARQUE.- Pour apprécier ce résultat, il faut se souvenir que les ensembles universellement mesurables ne sont pas stables en général pour les images directes par des applications continues. Ainsi, si l'on renforce les axiomes habituels de la théorie des ensembles en ajoutant l'axiome de "constructibilité" de Goedel, il existe une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$, dont le graphe est le complémentaire d'un ensemble analytique dans $[0,1]\times[0,1]$ (et donc universellement mesurable), telle que l'image de $[0,1]$ par cette fonction (soit encore, la projection de son graphe sur le second facteur) ne soit pas mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Enfin, on peut étendre des noyaux comme nous avons étendu les calibres

8 THÉORÈME.- *Soient* G *un espace et* U *un noyau capacitaire de* E *dans* F. *Posons, pour toute fonction* f *sur* ExG *et tout* $(y,z)\in F\times G$,

$$\overline{U}[(y,z),f] = U(y,f_z)$$

où f_z *désigne la fonction* $x \to f(x,z)$. *L'application* $\overline{U}$ *de* $\phi(E\times G)$ *dans* $\phi(F\times G)$ *ainsi définie est un noyau capacitaire de* ExG *dans* FxG, *régulier si* U *est régulier*.

DÉMONSTRATION.- Il est clair que, pour (y,z) fixé, la fonction $f \to \overline{U}[(y,z),f]$ est une capacité sur ExG. Il reste à vérifier que, pour g s.c.s. sur ExG, la fonction $(y,z) \to \overline{U}[(y,z),g]$ est analytique, et s.c.s. si U est régulier. Mais c'est ce que nous avons fait au n.10 du chapitre III.

9 COROLLAIRE.- *Soit* U *un noyau capacitaire de* E *dans* F. *Posons, pour toute fonction* f *sur* ExF *et tout* $y\in F$,

$$\overline{U}(y,f) = U(y,f_y)$$

L'application $\overline{U}$ *ainsi définie est un noyau capacitaire de* ExF *dans* F, *régulier si* U *est régulier*.

Voici une application à un exemple (que l'on peut traiter plus simplement) : soit d une distance sur E compatible avec sa topologie.

Posons, pour toute partie A de E, $U(x,A) = e^{-d(x,A)}$: U est un noyau régulier de E dans E (l'exponentielle servant à inverser les propriétés de monotonie de d). Donc, si A est analytique dans ExF, la fonction $(x,y) \to e^{-d(x,A(y))}$ est analytique, et l'ensemble $\{(x,y) : d(x,A(y)) \leq t\}$ est analytique pour tout $t \geq 0$: pour $t = 0$, on retrouve le fait que l'adhérence fine d'une partie analytique de ExF est analytique (cf le n.17-1) du chapitre I).

2.- SCHÉMAS DE MOKOBODZKI

D'abord, quelques rappels sur les schémas de Souslin. Nous désignons par S (resp Σ) l'ensemble des suites finies (resp infinies) d'entiers Si s est un élément de S et t un élément de S ou de Σ, la notation "$s < t$" signifie que t commence par s, et $t_1, t_2, \dots$ désignent les termes successifs de la suite t. Un schéma de Souslin sur un ensemble ϕ de fonctions sur E est une application $s \to f_s$ de S dans ϕ telle que $f_s \geq f_t$ pour $s < t$, et on appelle noyau du schéma $s \to f_s$ la fonction $f = \sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} f_s)$. Nous avons vu au chapitre I que toute fonction analytique est le noyau d'un schéma sur l'ensemble des fonctions s.c.s. et que tout noyau d'un schéma sur l'ensemble des fonctions analytiques est encore une fonction analytique.

10 DÉFINITION.- <u>Un schéma de Souslin</u> $s \to f_s$ <u>sur l'ensemble des fonctions</u> s.c.s. <u>est appelé un</u> schéma de Mokobodzki <u>si l'on a, pour tout noyau capacitaire</u> U <u>de</u> E <u>dans un espace</u> F,

$$U[\sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} f_s)] = \sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} Uf_s)$$

L'application $s \to Uf_s$ est un schéma de Souslin sur l'ensemble des fonctions analytiques sur F, que nous appellerons <u>image du</u>

<u>schéma</u> $s \to f_s$ <u>par le noyau</u> U.

Nous allons montrer que toute fonction analytique est le noyau d'un schéma de Mokobodzki. Nous établirons d'abord la proposition facile, mais importante, suivante

11 THÉORÈME.- <u>L'image d'un schéma de Mokobodzki par un noyau capacitaire</u> régulier <u>est encore un schéma de Mokobodzki</u>.

DÉMONSTRATION.- Soient $s \to f_s$ un schéma de Mokobodzki, U un noyau régulier de E dans F et V un noyau de F dans G. Comme $W = V \circ U$ est un noyau de E dans G, on a

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} Wf_s) = V \circ U[\sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} f_s)] = V[\sup_{\sigma \in \Sigma} (\inf_{s < \sigma} Uf_s)]$$

Il est alors clair que $s \to Uf_s$ est un schéma de Mokobodzki.

12 THÉORÈME.- <u>Toute fonction analytique est le noyau d'un schéma de Mokobodzki</u>.

DÉMONSTRATION.- Toute projection étant un noyau capacitaire régulier, il suffit de démontrer, d'après le théorème précédent, que toute fonction borélienne élémentaire est le noyau d'un schéma de Mokobodzki. Soit f une fonction borélienne élémentaire sur E : il existe une suite décroissante (f^m), et pour chaque entier m, une suite croissante (f^m_n) de fonctions s.c.s. telle que l'on ait $f = \inf f^m$ et $f^m = \sup f^m_n$. Nous allons reprendre le schéma de Souslin du paragraphe 3 du chapitre I, et montrer que c'est un schéma de Mokobodzki. Posons, pour toute suite finie $s = s_1, \dots, s_k$, $f_s = \inf (f^1_{s_1}, f^2_{s_2}, \dots, f^k_{s_k})$: l'application $s \to f_s$ est un schéma de Souslin sur les fonctions s.c.s., de noyau égal à f. Soit maintenant U un noyau capacitaire de E dans F, et désignons par g le noyau du schéma image $s \to Uf_s$: nous allons montrer que $g = Uf$.

D'abord, on a $g \leq Uf$: en effet, pour tout $\sigma \in \Sigma$, $U(\inf_{s<\sigma} f_s) = \inf_{s<\sigma} Uf_s$ (cf n.1-c)) et donc $Uf = U[\sup_{\sigma\in\Sigma} (\inf_{s<\sigma} f_s)] \geq \sup_{\sigma\in\Sigma} U(\inf_{s<\sigma} f_s) = g$ puisque U est croissant (cf n.1-a)). Il nous reste à montrer que $g \geq Uf$. Pour $y \in F$ fixé, la fonction $I_y(.) = U(y,.)$ est une capacité sur E (cf n.2-a)) : reprenons alors la démonstration du théorème de Sion (cf n.4 du chapitre II). Pour $t \geq 0$ fixé tel que $I_y(f) > t$, il existe $\sigma \in \Sigma$ telle que l'on ait, pour tout entier k,

$$I_y[\inf (f^1_{\sigma_1}, f^2_{\sigma_2}, \ldots, f^k_{\sigma_k})] > t$$

Par conséquent, on a

$$g(y) \geq \inf_{s<\sigma} U(y,f_s) = U(y, \inf_{s<\sigma} f_s) = I_y(\inf_{s<\sigma} f_s) \geq t$$

Il est alors clair que l'on a $g(y) \geq U(y,f)$, d'où la conclusion.

REMARQUE.- Pour démontrer l'inégalité $g \leq Uf$, nous n'avons utilisé que les propriétés a) et c) du n.1. En examinant de plus près la fin de la démonstration, on peut voir que l'inégalité $g \geq Uf$ est conséquence des seules propriétés a) et b) du n.1.

Nous obtenons ainsi une nouvelle démonstration du théorème 5

13 COROLLAIRE.- _Soit_ U _un noyau capacitaire de_ E _dans_ F. _Si_ f _est une fonction analytique sur_ E, _alors_ Uf _est analytique sur_ F.

REMARQUE.- Les fonctions analytiques ont été définies comme images de fonctions analytiques particulières (les fonctions boréliennes élémentaires) par des noyaux capacitaires réguliers particuliers (les projections). Le théorème précédent, qui est en quelque sorte un prolongement de la définition, montre que les noyaux capacitaires réguliers - stables par composition - forment une classe naturelle de morphismes pour une catégorie dont nous laissons au lecteur le soin de la définition.

3.- PROJECTIONS CAPACITAIRES

On rencontre malheureusement, d'une manière naturelle, des êtres un peu plus compliqués que les noyaux capacitaires. En voici un exemple simple : pour tout $t > 0$ et toute $f \in \Phi(E)$, posons $P_t f = 1_{\{f>t\}}$ et $Q_t f = 1_{\{f \geq t\}}$. Pour t fixé, P_t (resp Q_t) satisfait les conditions a) et b) (resp a), c) et d)) du n.1, mais pas les conditions c) et d) (resp b)). Cependant, en faisant varier t, on obtient un P_s (resp Q_s) comme limite à droite (resp à gauche) des Q_t (resp P_t). Dans la définition générale suivante, nous avons omis les arguments "(y,f)"; nous continuerons à le faire par la suite

14 DÉFINITION.- _Une_ projection capacitaire de E dans F _est une famille de couples_ (P_t, Q_t) _de_ $\Phi(E)$ _dans_ $\Phi(F)$, _indexée par un intervalle ouvert de_ $\mathbb{R}$, _satisfaisant les conditions suivantes_

a) _si_ $f \leq g$, _alors_ $P_t f \leq P_t g$ _et_ $Q_t f \leq Q_t g$ _pour tout_ t

b) _si_ (f_n) _est une suite croissante_, _on a_, _pour tout_ t

$$P_t(\sup f_n) = \sup P_t f_n$$

c) _si_ (g_n) _est une suite décroissante de fonctions s.c.s._, _on a_, _pour tout_ t,

$$Q_t(\inf g_n) = \inf Q_t g_n$$

d) _si_ g _est s.c.s._, _la fonction_ $Q_t g$ _est analytique pour tout_ t (_si elle est encore s.c.s._, _la projection capacitaire est_ régulière)

e) _les applications_ $t \to P_t$ _et_ $t \to Q_t$ _sont monotones décroissantes et l'on a_, _pour tout_ t, $P_t = \lim_{s \to t,\, s>t} Q_s \qquad Q_t = \lim_{s \to t,\, s<t} P_s$

Nous allons donner maintenant quelques exemples de projections capacitaires : ils seront intimement liés à certains noyaux capacitaires. Nous verrons au chapitre VI une projection capacitaire qui n'est pas liée "naturellement" à un noyau.

15 EXEMPLES.- 1) Tout noyau capacitaire, considéré comme application constante en "t", est évidemment une projection capacitaire.

2) Soit U un noyau capacitaire de E dans F, et posons, pour tout $t>0$ et toute $f\in\phi(E)$, $P_t f = 1_{\{y\,:\,U(y,f)>t\}}$ $\quad Q_t f = 1_{\{y\,:\,U(y,f)\geq t\}}$

La famille (P_t,Q_t) ainsi définie est une projection capacitaire (régulière si U est régulier). Si on prend E = F, et U = identité, on retrouve l'exemple du début.

3) Soit encore U un noyau de E dans F, et étendons U en un noyau $\overline{U}$ (resp $\bar{U}$) de ExG dans FxG (resp de ExF dans F) suivant les procédés des n.8 et 9. Si on applique à $\overline{U}$ ou à $\bar{U}$ la construction de l'exemple précédent, on obtient une nouvelle notion de projection capacitaire associée au noyau U. Prenons, en particulier, pour U une capacité : si A est analytique dans ExF, l'ensemble des $y\in F$ tels que la capacité de la coupe A(y) soit supérieure à un niveau donné est fourni par la projection capacitaire construite à partir de $\bar{U}$ (d'où le nom de "projection")

4) Pour tout $t>0$ et toute $f\in\phi(E)$, posons

$$P_t f = \{(x,u)\in E\times\overline{\mathbb{R}} : f(x)>tu\} \qquad Q_t f = \{(x,u)\in E\times\overline{\mathbb{R}} : f(x)\geq tu\}$$

(pour t = 1, $P_t f$ (resp $Q_t f$) est le sous-graphe ouvert (resp fermé) de f dans $E\times\overline{\mathbb{R}}$). La famille (P_t,Q_t) ainsi définie est une projection capacitaire. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe un noyau U défini sur les parties de $E\times\overline{\mathbb{R}}$, à valeurs dans $\phi(E)$, tel que l'on ait $U(P_t f) = U(Q_t f) = f/t$ pour tout $t>0$ et toute $f\in\phi(E)$.

16 THÉORÈME.- <u>Soit</u> (P_t,Q_t) <u>une projection capacitaire de</u> E <u>dans</u> F. <u>L'application</u> P_t <u>est alors, pour tout</u> t, <u>un calibre de</u> E <u>dans</u> F.

DÉMONSTRATION.- Quitte à remplacer P_t par (Arc tg)$\circ P_t$ et Q_t par (Arc tg)$\circ Q_t$, on peut supposer les $P_t f$ et $Q_t f$ majorés uniformément en t et f par une constante. Posons, pour tout entier n et tout t,

$$U_t^n = \int_t^{t+1/n} P_s \, ds = \int_t^{t+1/n} Q_s \, ds$$

On vérifie aisément que, pour n et t fixés, U_t^n est un noyau capacitaire de E dans F, et que, pour t fixé, P_t est égale à la limite croissante des $n.U_t^n$. Une limite croissante de calibres étant encore un calibre, le théorème résulte du théorème 4.

17 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> (P_t,Q_t) <u>une projection capacitaire de</u> E <u>dans</u> F. <u>Si</u> f <u>est une fonction analytique sur</u> E, <u>alors</u> $P_t f$ <u>et</u> $Q_t f$ <u>sont</u>, <u>pour chaque</u> t, <u>des fonctions analytiques sur</u> F.

Notons enfin que l'on peut étendre aux projections capacitaires, de manière évidente, les opérations de composition et d'extensions que nous avons définies pour les noyaux capacitaires. On obtient ainsi de nouvelles projections capacitaires, avec conservation de la regularité comme pour les noyaux.

4.- COMPLÉMENTS

18 Les notions de noyaux capacitaires et de projections capacitaires s'étendent sans difficulté au cas des espaces pavés sans topologie. Mais comme ce n'est pas le cas pour les calibres, il n'est pas évident que les théorèmes que nous avons demontrés sont encore valables. Cependant, le paragraphe 2 ne faisant intervenir que des schémas de Souslin, les théorèmes "d'analyticité" des n.13 et 17 sont encore vrais, ainsi que le théorème d'existence des schémas de Mokobodzki. Un autre point à vérifier est que nos

procédés d'extensions de noyaux ou projections fournissent encore des noyaux ou projections. Limitons nous au cas des noyaux réguliers. Soit U un noyau régulier de $(E,\underline{\underline{E}})$ dans $(F,\underline{\underline{F}})$, i.e. une application de $\phi(E)$ dans $\phi(F)$ telle que i) pour $y \in F$ fixé, $f \to U(y,f)$ est une $\underline{\underline{E}}$-capacité sur E ii) si f appartient au pavage $\underline{\underline{E}}$, $y \to U(y,f)$ appartient au pavage $\underline{\underline{F}}$. Soit maintenant $(G,\underline{\underline{G}})$ un autre espace pavé : nous supposerons que $\underline{\underline{G}}$ est constitué d'ensembles et contient G. Nous désignerons alors par $\underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ (resp $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$) l'ensemble des fonctions g sur ExG (resp FxG) de la forme

$$g = \sup\ [(f_1 x L_1),\ldots,(f_n x L_n)]$$

où n est un entier, f_i un élément de $\underline{\underline{E}}$ et L_i un élément de $\underline{\underline{G}}$ pour $i = 1,\ldots,n$: la condition que $\underline{\underline{G}}$ soit constitué d'ensembles assure que $\underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ et $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ sont des pavages. Prolongeons alors U en $\overline{U}$ en posant, comme d'habitude,

$$\overline{U}[(y,z),f] = U(y,f_z)$$

où f est une fonction sur ExG et f_z désigne la fonction $x \to f(x,z)$ pour z fixé. La seule chose non évidente à vérifier, pour assurer que $\overline{U}$ est un noyau, est que $\overline{U}g$ appartient à $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ si g appartient à $\underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$. Et cela résulte du lemme suivant (que je trouve amusant; il m'a coûté jadis une nuit blanche : je suis bien content de le caser quelquepart)

19 THÉORÈME.- <u>Soit</u> r <u>une application</u> croissante <u>de</u> $\phi(E)$ <u>dans</u> $\phi(F)$, <u>dont la restriction à</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>est à valeurs dans</u> $\underline{\underline{F}}$. <u>Prolongeons</u> r <u>en une application</u> ρ <u>de</u> $\phi(ExG)$ <u>dans</u> $\phi(FxG)$ <u>en posant</u>, <u>pour</u> $f \in \phi(ExG)$ <u>et</u> $(y,z) \in FxG$

$$\rho[(y,z),f] = r(y,f_z)$$

<u>La restriction de</u> ρ <u>à</u> $\underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ <u>est alors à valeurs dans</u> $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$.

DÉMONSTRATION.- Pour toute $g \in \underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$, il existe un plus petit entier $d(g)$ (appelé dimension de g) tel qu'il existe $f_i \in \underline{\underline{E}}$ et $L_i \in \underline{\underline{G}}$, $i = 1,\dots,d(g)$ pour lesquels on ait $g = \sup\,[(f_1 x L_1),\dots,(f_{d(g)} x L_{d(g)})]$. Nous allons raisonner par récurrence sur $d(g)$. D'abord, si $d(g) = 1$, on a $g = f_1 x L_1$, $f_1 \in \underline{\underline{E}}$, $L_1 \in \underline{\underline{G}}$, et donc $\rho(g) = \sup\,[(r(f_1) x L_1),(r(0) x G)]$ appartient à $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$. Supposons démontré que la restriction de ρ à l'ensemble des éléments de $\underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ de dimension $\leqslant n$ soit à valeurs dans $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$, et soit $g \in \underline{\underline{E}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$ de dimension $n+1$ (nous conseillons au lecteur de faire un dessin avec $n = 3$). Par définition, il existe $f_i \in \underline{\underline{E}}$ et $L_i \in \underline{\underline{G}}$ pour $i = 1,\dots,n+1$ tels que l'on ait

$$g = \sup\,[(f_1 x L_1),\dots,(f_n x L_n),(f_{n+1} x L_{n+1})]$$

Soit alors $g_i = (f_i x L_i)$ pour $i = 1,\dots,n+1$ et posons

$$g^1 = \sup\,(g_1,\dots,g_n)$$
$$g^2 = g^{n+1}$$
$$g^3 = g \wedge ([\bigvee_1^{n+1} f_i] x [(\bigcup_1^{n} L_i) \cap L_{n+1}]), \text{ soit encore,}$$
$$g^3 = \sup\,[(f_1 \vee f_{n+1} x L_1 \cap L_{n+1}),\dots,(f_n \vee f_{n+1} x L_n \cap L_{n+1})]$$

On a évidemment $g = \sup\,(g^1,g^2,g^3)$ et donc l'inégalité (*) suivante : $\rho(g) \geqslant \sup\,[\rho(g^1),\rho(g^2),\rho(g^3)]$. D'autre part, on a $d(g^1) \leqslant n$, $d(g^2) = 1$ et $d(g^3) \leqslant n$: les fonctions $\rho(g^1)$, $\rho(g^2)$ et $\rho(g^3)$ appartiennent ainsi à $\underline{\underline{F}} \boxtimes \underline{\underline{G}}$. Nous allons montrer que l'inégalité (*) est en fait une égalité, ce qui achèvera la démonstration. Pour $z \in G$ fixé, la fonction g_z est égale à l'une des trois fonctions g^1_z, g^2_z, g^3_z, et donc la fonction $\rho(g)_z$, égale par définition à $y \to r(y,g_z)$, est égale à l'une des trois fonctions $\rho(g^1)_z, \rho(g^2)_z, \rho(g^3)_z$. D'où la conclusion.